

Exercice 1

1. Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3,$$

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2,$$

$$X^4 - X^3 + X - 2 \text{ par } X^2 - 2X + 4.$$

Exercice 2

1. Trouver les polynomes P tels que $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ par $(X + 1)^4$:

- En considérant le polynome dérivé P' .
- En utilisant la relation de Bezout,

2. Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

Exercice 3 :

1. Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

2. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,

3. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 4

1. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynome $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

2. Pour quelles valeurs de a le polynome $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynome $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynomes suivants en facteurs irréductibles.

1. $A = X^3 - 3$.

2. $B = X^{12} - 1$.