

### Exercice 1

1. Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3,$$

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2,$$

$$X^4 - X^3 + X - 2 \text{ par } X^2 - 2X + 4.$$

### Exercice 2

1. Trouver les polynomes  $P$  tels que  $P + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^4$  et  $P - 1$  par  $(X + 1)^4$  :

- En considérant le polynome dérivé  $P'$ .
- En utilisant la relation de Bezout,

2. Combien y a-t-il de solutions de degré  $\leq 7$  ?

### Exercice 3 :

1. Calculer  $\text{pgcd}(P, Q)$  lorsque :

2.  $P = X^3 - X^2 - X - 2$  et  $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2,$

3.  $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $Q = X^3 + X + 1.$

### Exercice 4

1. Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$ , sans déterminer ses racines, le polynome  $P = X^4 + 1$ , en produit de facteurs irréductibles.

2. Pour quelles valeurs de  $a$  le polynome  $(X + 1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

3. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynome  $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

### Exercice 5

Dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ , décomposer les polynomes suivants en facteurs irréductibles.

1.  $A = X^3 - 3.$

2.  $B = X^{12} - 1.$